基于正交距离最短的平面线形拟合方法及应用

王利朋,刘成龙,杨雪峰

(西南交通大学 地球科学与环境工程学院,四川 成都 611756)

摘 要:线形拟合在轨道的调整中具有非常重要的作用,考虑到铁路轨道测量实测点的平面坐标 x 和 y 中均包含误差,提出基于正交距离最短的直线和圆曲线线形拟合方法,并对利用该方法进行拟合的原理进行阐述。目前常用的线形拟合方法是普通最小二乘法,主要考虑 x 或 y 某一个方向上的误差。按照正交距离最短和最小二乘 2 个准则,论证了同时考虑 x 和 y 2 个方向误差的正交距离最小二乘法要优于普通最小二乘法。通过实例计算分析,2 种方法对于同一组线形测量数据的拟合结果表明,正交距离最小二乘法的验后精度高于或接近普通最小二乘法,而且残差即为轨道点至拟合线形的拨道量,同时前者具有更小的圆度,说明调整量区间更小。以上内容证明了在铁路既有线线形整正优化中正交距离最小二乘法优于普通最小二乘法。

关键词:线形拟合;正交距离最小二乘;圆度;整正优化;验后精度

中图分类号:P207 **文献标志码**:A **文章编号**:1672 - 7029(2014)05 - 0125 - 06

Method and application of plane linear fitting based on shortest orthogonal distance

WANG Lipeng, LIU Chenglong, YANG Xuefeng

(School of Geosciences and Environmental Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: Linear fitting is very important in track adjustment. Given the error of horizontal coordinates in measured points of tracks, the method of line - fitting and circular curve - fitting was proposed based on shortest orthogonal distance. Then the principle of the method was introduced. The main method in linear fitting is ordinary least squares at the moment, which mainly considers the error of a specific direction. According to two norms, shortest orthogonal distance and least squares, this paper proved that the method of orthogonal distance least squares considered the error of horizontal coordinates and was more effective than ordinary least squares on whole. The results of data fitting, according to different methods, show that orthogonal distance least squares method has higher posteriori precision, and the residual errors represent variation of track lining. Meanwhile, the former method has a smaller roundness, which shows the small interval of adjustment. The results in this paper prove that the orthogonal distance least squares method has advantages over the ordinary least squares in standardization and optimization of existing railway lines.

Key words: linear fitting; orthogonal distance least squares; roundness; standardization and optimization; posteriori precision

随着我国高速铁路的发展以及普速铁路的提速,铁路轨道的平顺性评价以及轨道不平顺处的调整逐渐成为一个非常重要的研究课题。轨道不平顺不仅限制列车运行的速度,还直接影响列车运行的平稳性。当线路设计文件缺失或现有的线路设计文件不再具有现实性时,就需要通过线形拟合确定一

收稿日期:2014 - 03 - 19

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(SWJTU12ZT07/SWJTU12BR014);“2011 计划”轨道交通安全协同创新中心经费资助项目

通讯作者:刘成龙(1962 -),男,福建莆田人,教授,从事精密工程测量与变形监测研究;E - mail:lclzwy@ vip. sina. com

个与既有线路实际情况最为契合的线形，这一工作称为轨道线形整正优化，传统上这个过程中采用的基本准则为最小二乘准则。利用最小二乘原理可以简便地求出既有线直线段与圆曲线段拟合模型中的未知参数，即直线的斜率和截距、圆曲线的圆心和半径，并且使得残差平方和最小。传统的最小二乘拟合方法只考虑线路平面坐标观测值(x,y)中单一变量 x 或 y 的测量误差，实际测量过程中坐标 x 与 y 均有误差[1-3]，而依据正交距离最短的原则进行既有线线形的拟合，就是同时考虑 x 与 y 均有误差。本文依据正交距离最短的原则进行铁路既有线线形的拟合，并将它与传统的的最小二乘拟合方法进行对比。通过实例计算和精度评定，证明了基于正交距离最短的最小二乘线形拟合效果要优于传统的最小二乘线形拟合，前者可以得出与轨道线形最为契合的函数模型。正交距离最小二乘线形拟合按照拨道量的平方和最小这一准则确定法方程并求解模型参数，不仅简化了参数求解过程，提高了线形拟合的整体精度，而且获得了更小的圆度。

1 正交距离最短的线形拟合原理

1.1 正交距离最短的直线拟合原理

设欲拟合的直线方程为：

$$y = a + bx \tag{1}$$

式(1)中 a 和 b 分别为直线的截距和斜率，设 a_0 和 b_0 为 a 和 b 的近似值，δa 和 δb 为 a_0、b_0 的改正数，于是有：

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a \\ b &= b_0 + \delta b \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

任一平面测点(x_i,y_i)到拟合直线距离的平方为：

$$S_i^2 = \frac{[(b_0+\delta b)x_i + (a_0+\delta a) - y_i]^2}{(b_0+\delta b)^2+1} \tag{3}$$

设 $\tilde{S}_i = S_i^2$，按照二元函数的泰勒级数展开式对式(3)进行展开，并略去二次项和更高次项后得到距离的误差方程为：

$$\tilde{S}_i = \left[\frac{2(b_0x_i+a_0-y_i)}{b_0^2+1}\quad \frac{2x_i(b_0x_i+a_0-y_i)}{b_0^2+1} - \frac{2b_0(b_0x_i+a_0-y_i)^2}{(b_0^2+1)^2}\right]\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta b\end{bmatrix} - \left(-\frac{(b_0x_i+a_0-y_i)^2}{b_0^2+1}\right) \tag{4}$$

即正交距离最短的直线拟合误差方程的矩阵形式为：

$$\boldsymbol{\tilde{S}} = \boldsymbol{B\hat{x}} - \boldsymbol{l} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\tilde{S}} = \begin{bmatrix}\tilde{S}_1\\ \tilde{S}_2\\ \vdots\\ \tilde{S}_m\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{2(b_0x_1+a_0-y_1)}{b_0^2+1} & \frac{2x_1(b_0x_1+a_0-y_1)}{b_0^2+1} - \frac{2b_0(b_0x_1+a_0-y_1)^2}{(b_0^2+1)^2} \\ \frac{2(b_0x_2+a_0-y_2)}{b_0^2+1} & \frac{2x_2(b_0x_2+a_0-y_2)}{b_0^2+1} - \frac{2b_0(b_0x_2+a_0-y_2)^2}{(b_0^2+1)^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2(b_0x_m+a_0-y_m)}{b_0^2+1} & \frac{2x_m(b_0x_m+a_0-y_m)}{b_0^2+1} - \frac{2b_0(b_0x_m+a_0-y_m)^2}{(b_0^2+1)^2} \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\hat{x}} = \begin{bmatrix}\delta a\\ \delta b\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} -\frac{(b_0x_1+a_0-y_1)^2}{b_0^2+1} \\ -\frac{(b_0x_2+a_0-y_2)^2}{b_0^2+1} \\ \vdots \\ -\frac{(b_0x_m+a_0-y_m)^2}{b_0^2+1} \end{bmatrix}$。

设 $\tilde{S}_i$ 等精度，按照最小二乘准则求解，得到直线参数改正数的平差值：

$$\hat{x} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}l \tag{6}$$

把式(6)的结果代入式(5)后，可按下式计算验后单位权方差为：

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\tilde{S}^{\mathrm{T}}\tilde{S}}{m-2} \tag{7}$$

则未知参数的方差－协方差阵为：

$$D_{\hat{X}\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{X}\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2(B^{\mathrm{T}}B)^{-1} \tag{8}$$

1.2 正交距离最短的圆曲线拟合原理

设欲拟合的圆曲线方程为：

$$(X-\hat{X})^2 + (Y-\hat{Y})^2 = \hat{R}^2 \tag{9}$$

式(9)中 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 和 $\hat{R}$ 分别为圆曲线的 3 个参数，设

X_0，Y_0 和 R_0 分别为 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 和 $\hat{R}$ 的近似值，δx，δy 和 δr 为圆曲线方程中参数的改正数，则：

$$\left.\begin{aligned}\hat{X} &= X_0 + \delta x\\ \hat{Y} &= Y_0 + \delta y\\ \hat{R} &= R_0 + \delta r\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

任一平面测点(X_i，Y_i)到拟合圆的距离为：

$$S_i = \sqrt{(X_i - \hat{X})^2 + (Y_i - \hat{Y})^2} - \hat{R} \tag{11}$$

将式(11)在(X_0，Y_0，R_0)处按照多元函数的泰勒级数展开式进行展开，并略去二次项和更高次项后得到线性化的距离误差方程纯量形式为：

$$S_i = \left[-\frac{X_i - X_0}{\sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2}} \quad -\frac{Y_i - Y_0}{\sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2}} \quad -1\right]\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta r\end{bmatrix} - \left(-\sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2} + R_0\right) \tag{12}$$

上述距离矩阵形式的误差方程为：

$$S = B\hat{x} - l \tag{13}$$

其中：$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1\\ \boldsymbol{S}_2\\ \boldsymbol{S}_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}-\frac{X_1 - X_0}{\sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2}} & -\frac{Y_1 - Y_0}{\sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2}} & -1\\ -\frac{X_2 - X_0}{\sqrt{(X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2}} & -\frac{Y_2 - Y_0}{\sqrt{(X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2}} & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -\frac{X_n - X_0}{\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2}} & -\frac{Y_n - Y_0}{\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2}} & -1\end{bmatrix}$，

$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta r\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix}-\sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2} + R_0\\ -\sqrt{(X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2} + R_0\\ \vdots\\ -\sqrt{(X_n - X_0)^2 + (Y_n - Y_0)^2} + R_0\end{bmatrix}$。

设 S_i 等精度，按照最小二乘准则求解，得到圆曲线参数改正数的平差值：

$$\hat{x} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}l \tag{14}$$

之后，可按照式(7)和式(8)类似的原理，计算圆曲线拟合后的验后单位权方差和未知参数的方差－协方差阵。

2　正交距离最短与普通最小二乘法线形拟合的比较与分析

普通最小二乘法的直线拟合按照 $V_y^{\mathrm{T}}PV_y = \min$ 的准则得到直线拟合参数的最佳估值，仅考虑了样本点在 y 方向上的测量误差，而忽略了样本点在 x 方向上的测量误差。在实际的工程应用中，需要线形拟合结果在 x 和 y 2 个方向上都与实际情况契合，而不仅仅是一个方向上的契合。以直线段的线形拟合为例，基于正交距离最短的最小二乘法在 $S^{\mathrm{T}}PS = \min$ 准则下进行解算，由于距离的误差方程式（4）中同时含有 x 和 y，因此基于正交距离最短的求解方法考虑了样本点在 x 和 y 2 个方向上的测量误差，在与既有线实际线形最为契合的意义下得到直线参数估值，从而更加有利于既有线的整正优化。圆曲线拟合中 2 种方法的计算原理优缺点与直线拟合中两种方法的优缺点相同。

为了比较正交距离最短最小二乘与普通最小二乘的线形拟合效果差异情况，采用某普速铁路上一段直线数据与一段圆曲线数据进行计算实验，然

后通过比较不同拟合方法计算得出的参数估值的精度、样本点的残差以及验后单位权中误差，分析不同拟合方法的拟合效果。由于轨道线形测量数据量庞大，在此仅列出利用直线段 10 个样本点进行拟合的对比结果和利用圆曲线段 18 个样本点进行拟合的对比结果。直线段样本点坐标如表 1 所示，2 种方法拟合的残差如表 2 所示，参数估值及精度信息如表 3 所示。圆曲线段样本点坐标如表 4 所示，残差对比如表 5 所示，圆曲线拟合的参数估值及精度信息如表 6 所示。

表 1 直线段线形拟合样本点

Table 1 Sample points of line – fitting

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X/m	21.212 5	18.330 5	16.611 1	14.344 3	13.764 8	13.188 8	12.625 4	10.339 7	7.597 4	4.790 1
Y/m	8.396 2	9.949 9	10.879 1	12.100 1	12.412 3	12.723 3	13.026 5	14.262 8	15.742 7	17.253 3

表 2 直线段不同拟合方法计算的残差

Table 2 Residual errors of different line – fitting methods

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
普通最小二乘法 V_Y/mm	-0.56	0.49	-1.24	0.63	1.03	0.81	1.50	-1.77	-2.36	1.49
正交最小二乘法 V_S/mm	0.00	-0.23	-1.08	-0.56	-0.95	-0.70	-1.39	-0.55	-0.41	0.00

注：表 2 中的“+”、“-”表示样本点分布在直线段的不同侧，不代表数学意义上的正负。

表 3 直线段不同拟合方法计算的参数估值及精度信息

Table 3 Parametric estimation and precision of different line – fitting methods

项目	a/m	b	$\hat{\sigma}_0$/mm	m_a/mm	m_b
普通最小二乘法	19.838 04	-0.539 55	1.473 4	1.415 4	0.100 6
正交最小二乘法	19.832 81	-0.539 24	0.896 8	0.426 2	4×10^{-5}

为了更准确地描述轨道线形实测点与拟合线形的接近程度，引入圆度作为一个评价标准。圆度是指圆柱体截面上一个实际圆与理论圆（本文中理论圆为拟合圆）的接近程度，为最大外接圆半径与最小内接圆半径之差值[4]。引入到线形拟合中，可以表示为线形实测点到拟合线形的最大与最小距离之差，也可以表示为所有样本点的最大与最小残差的差值，此时，表 2 中的“+”、“-”作为数学意义上的正负参与运算。该指标表示实际线形相对于拟合线形的波动范围，在轨道调整中可以代表拨道量的区间。

从表 2 可以看出，正交距离最小二乘法的残差更加均匀，其圆度为 $e_1 = 1.39$ mm，即轨道调整时拨道量区间较小；而普通最小二乘法的残差分布不均匀，其圆度为 $e_2 = 3.86$ mm，拨道量区间相对较大，不利于轨道的调整。从验后的精度信息来看，表 3 中数据表明正交距离最小二乘法解算的参数精度高于普通最小二乘法，说明这种方法得到的线形更加符合实际情况。

表 4 圆曲线段曲线拟合样本点

Table 4 Sample points of circular curve – fitting

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X/m	3.295 6	7.367 1	11.466 5	14.131 0	16.619 9	19.205 8	21.517 2	24.993 8	26.856 1
Y/m	8.594 1	6.158 4	4.242 3	3.250 3	2.497 4	1.876 3	1.458 9	1.051 6	0.939 5
点号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X/m	29.260 4	31.929 9	34.334 5	37.180 5	41.006 2	44.744 4	49.016 4	51.954 7	53.659 1
Y/m	0.916 6	1.040 9	1.292 7	1.756 5	2.687 6	3.951 9	5.864 9	7.504 6	8.593 0

表5　圆曲线段不同拟合方法计算的残差

Table 5 Residual errors of different circular curve – fitting methods

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
普通最小二乘法 V_Y/mm	0.9	-1.9	0.1	3.8	1.0	-1.1	-6.5	-4.6	1.9
正交最小二乘法 V_S/mm	1.0	-1.3	0.3	1.9	1.0	-1.0	-2.5	-2.2	1.3
点号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
普通最小二乘法 V_Y/mm	2.5	3.8	1.7	3.6	0.0	-3.8	-4.6	-0.3	3.5
正交最小二乘法 V_S/mm	1.6	1.9	1.3	1.9	-0.3	-1.9	-2.0	-0.4	1.8

注:表6中"+"、"-"号的意义同表2。

表6　圆曲线段不同拟合方法计算的参数估值及精度信息

Table 6 Parametric estimation and precision of different circular curve – fitting methods

项目	X/m	Y/m	R/m	$\hat{\sigma}_0$/mm	m_X/mm	m_Y/mm	m_R/mm
普通最小二乘法	28.4638	46.0194	45.0929	3.4	2.2	12.6	11.8
正交最小二乘法	28.4763	46.0179	45.1056	3.2	2.2	13.2	12.5

如表5所示,正交距离最小二乘法计算得出的残差总体上要小于普通最小二乘法且更加均匀,表6数据表明正交距离最小二乘法的验后单位权中误差要优于普通最小二乘法,2种方法的参数精度几乎相等。正交最小二乘法的圆度为 $e_3 = 4.5$ mm,而普通最小二乘法的圆度为 $e_4 = 10.3$ mm,即2种方法的轨道调整量相差5.8 mm,因此,在进行圆曲线拟合时,正交最小二乘法要优于普通最小二乘法。出于工程量和工作效率的考虑,理应以正交距离最小二乘法取代普通最小二乘法作为线形拟合的最优方法,并以此为依据计算拨道量。

3　结论

(1)从前面所述的2种拟合方法的拟合原理可以看出,基于正交距离最短的最小二乘法同时考虑了样本点在 x 和 y 2个方向上的误差,而普通最小二乘法仅考虑了一个方向上的误差。因此,按照正交最小二乘法所开列的误差方程要优于普通最小二乘法。

(2)通过实测数据的拟合结果可以看到,正交距离最小二乘法的残差总体上小于普通最小二乘法的残差。而且前者的圆度小于后者,这一点对于既有线的整正优化具有重要意义,因为圆度的大小直接决定了轨道调整量的区间,这也说明了正交距离最小二乘法有利于减少工作量,从而提高工作效率。

(3)采用本文提供的算法,直线拟合中验后精度提高了2~3倍,轨道调整量区间减小了2.47 mm;圆曲线拟合中验后精度几乎相等,轨道调整量区间减小了5.80 mm。因此,在线形拟合和轨道调整工作中应采用正交距离最小二乘法取代普通最小二乘法是具有实际意义的。

参考文献:

[1] 丁克良, 欧吉坤, 赵春梅. 正交最小二乘曲线拟合法[J]. 测绘科学, 2007, 32(3): 18-19.
DING Keliang, OU Jikun, ZHAO Chunmei. Method of orthogonal least squares in curve-fitting[J]. Science of Surveying and Mapping, 2007, 32(3): 18-19.

[2] 朱文华, 覃爱丽. 基于几何距离准则拟合铁路线路参数的研究[J]. 铁路计算机应用, 2010 (5): 14-16.
ZHU Wenhua, QIN Aili. Study on track parameters based on geometry distance[J]. Railway Computer Application, 2010 (5): 14-16.

[3] 丁克良, 沈云中, 欧吉坤. 整体最小二乘法直线拟合[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2010 (1): 44-47.
DING Keliang, SHEN Yunzhong, OU Jikun. Total least squares on linear fitting[J]. Journal of Liaoning Technical University(Natural Science Edition), 2010 (1): 44-

47.

[4] 丁玲. 圆度与圆柱度误差评定算法的设计与应用[D]. 西安:西安电子科技大学, 2013.

DING Ling. The design an application of roundness and estimative Methods[D]. Xi'an:Xidian University, 2013.

[5] 曾接贤, 张桂梅, 储珺, 等. 霍夫变换与最小二乘法相结合的直线拟合[J]. 南昌航空工业学院学报(自然科学版), 2003, 17(4):9－13.

ZENG Jiexian,ZHANG Guimei,CHU Jun,et al. Combination of hough transformation and least squares on linear fitting[J]. Journal of Nanchang Hangkong University (Natural Sciences), 2003,17(4):9－13.

[6] 雷宜武, 肖萍. 直线拟合的一个快速算法[J]. 华中理工大学学报, 1994, 22(1): 75－78.

LEI Yiwu,XIAO Ping. A fast method of linear fitting[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 1994, 22(1): 75－78.

[7] 兰燕娜, 薛同莲, 李雅丽, 等. 基于 VB 语言实现最小二乘法直线拟合[J]. 长江大学学报(自然科学版), 2011, 8(6): 92－94.

LAN Yanna,XUE Tonglian,LI Yali,et al. Achievement of least squares on linear fitting based on VB[J]. Journal of Yangtze University(Natural Science Edition), 2011, 8(6): 92－94.

[8] 乔立山, 王玉兰, 曾锦光. 实验数据处理中曲线拟合方法探讨[J]. 成都理工大学学报(自然科学版), 2004, 31(1): 91－95.

QIAO Lishan,WANG Yulan,ZENG Jinguang. Methods of curve－fitting in experimental data[J]. Journal of Chengdu University of Technology(Science & Technology Edition), 2004, 31(1): 91－95.

[9] 许恺. 三种曲线拟合方法的精度分析[J]. 上海铁道大学学报, 1996, 17(3): 26－30.

XU Kai. Precision analysis of three different curve－fitting methods[J]. Journal of Shanghai Tiedao University, 1996, 17(3): 26－30.

[10] 陈峰,辜良瑶,杨岳,等. 铁路既有线复测平面曲线优化方法[J]. 铁道科学与工程学报, 2012, 9(5): 90－95.

CHEN Feng,GU Liangyao,YANG Yue,et al. Optimum method for horizontal curve re－surveying of the existing railway[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2012, 9(5): 90－95.

[11] 於宗俦, 陶本藻, 刘大杰. 广义测量平差[M]. 北京:测绘出版社, 1992.

YU Zongchou,TAO Benzao,LIU Dajie. Generalized surveying adjustment[M]. Beijing:The Publishing House of Surveying and Mapping,1992.

[12] 宋力杰. 测量平差程序设计[M]. 北京:国防工业出版社, 2009.

SONG Lijie. Program design of survey adjustment[M]. Beijing:National Defence Industry Press,2009.

[13] 徐士良. 数值分析与算法[M]. 北京:机械工业出版社, 2003.

XU Shiliang. Numerical analysis and algorithm[M]. Beijing:Machinery Industry Press,2003.

[14] Hough P V C. Method and means for recognizing complex patterns:U. S. Patent 3,069,654[P]. 1962－12－18.

[15] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods[J]. Mathematics of Computation, 1981, 37(155): 141－158.

[16] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element - free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229－256.